1　カオスとは

カオスは非線形力学系の普遍的な現象である．現象が微分方程式や差分方程式によって記述される系では、初期条件を与えれば未来の状態は一意に決まる．つまり決定論的な性格をもっている．このような系を一般に力学系という．物理の基本則にはこのような決定論的なものが多い．一方、ブラウン運動のように複雑で解析が困難な現象には確率を導入して統計的に扱うことが普通である．

決定論的な性格をもつ系で、初期状態にわずかに差を与えるとその差が拡大されて、充分時間がたった後には系の状態を初期状態と同じ精度で求めることができなくなることがある．このとき系はカオスの状態であるという．カオスになると未来の状態は決定論的であるにもかかわらず確率論的つまり予測不可能になる．カオスがこのような性質をもつことは、対立すると思われていた決定論と確率論が結びつく可能性を示しており、現在盛んに研究が行なわれている．

カオスは以下のような性質で特徴付けられる．

- 初期値に対して鋭敏な依存性がある．近接した2つの初期値の軌道は時間とともに指数関数的に離れる．
- 運動は周期的ではない．パワースペクトルにあらゆる周波数に対応する成分が現れる．自己相関関数が急速に0に減衰する．

本実験は、カオス現象が現れるモデルとしてロジスティック写像と標準写像を扱い、計算機によるシミュレーションを通して理解することを目的とする．

2　１次元写像：ロジスティック写像

May は1976年に、生物の増殖、死滅、他の生物の捕食などによる数の変化を調べるためにロジスティック写像（Logistic Map）を提案した．$n+1$ 世代の個体数 x_{n+1} が、その前年度の個体数 x_n にのみ依存するという仮定によって、

$$f(x) = Rx(1-x)$$

として

$$x_{n+1} = f(x_n) = Rx_n(1-x_n) \quad (0 \le R \le 4)$$

の写像の形で定義される．ロジスティック写像は、非常に個体数が少ない場合 $(x_n << 1)$、$1-x \sim 1$ と考えられるので増加を表し、個体数が1に近付くと減少することを説明している．

解の数列 $\{x_n\}$ を軌道と呼ぶ．$f(x)$ は、パラメータ R を上のように $0 \le R \le 4$ としたときに限り区間 $I=[0,1]$ から I 自身への非線形写像となる．

この写像により軌道は決定論的に求められる．なぜなら R を固定して写像を決め、x_n の初期値 x_0 を与えて $n=1,2,\cdots$ と写像を順次反復すると、軌道は一意に求められるからである．

R を変えることによって、この系にどんな現象が現れるだろうか．

2.1 周期軌道とその安定性

写像 $f(x)$ に対して、その n 回反復 $f^n(x)$ が

$$f^n(x) = f(f^{n-1}(x)) = x \quad \text{かつ} \quad f^k(x) \neq x \quad (k = 1, 2, \cdots, n-1)$$

を満たすとき、点 x は f の n 周期点と呼ばれる．特に 1 周期点を f の不動点と呼ぶ．ロジスティック写像の不動点は

$$x = f(x) = Rx(1-x)$$
$$x(Rx - R + 1) = 0$$

により

$$x = 0, 1 - \frac{1}{R}$$

である．$x = 1$ を初期値に取ると写像の 1 回の反復により $x = 0$ となるので、このような点は究極的には周期的な点とよばれる．

また 3 周期点 $f^3(x) = x$ は 6 周期点でもある．このことは

$$f^6(x) = f^3(f^3(x)) = f^3(x) = x$$

となることから容易にわかる．一般に p, q を自然数とすると、p 周期点は $p \times q$ 周期点となる．n 周期点は $y = x$ と $y = f^n(x)$ のグラフの交点として表される．

点 x が写像 f の不動点 ($f(x) = x$) のとき x の近傍の点 $y(\neq x)$ を初期値とする軌道が

$$\lim_{n\to\infty} |f^n(y) - x| = 0$$

を満たすとき、x は安定であるという．つまり y から出発した軌道が時間の経過とともに x に収束するとき安定である．

一般に、p 周期軌道を $(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_{p-1}, \bar{x}_p)$、（ただし $\bar{x}_p = \bar{x}_0$）とすると、各 x の値に対して $\bar{x}_j = f^p(\bar{x}_j)$ $(j = 0, 1, \cdots, p-1)$ が成り立つ．

$\bar{x}_j$ から変位 δ_0 だけ異なる初期値 $x_0 = \bar{x}_j + \delta_0$ から出発した軌道は、写像の p 回反復後には $\bar{x}_j$ と変位 δ_p だけ異なる $x_p = \bar{x}_j + \delta_p$ となる．

$$\bar{x}_j + \delta_p = f^p(\bar{x}_j + \delta_0)$$

δ_0 は微小であるので、δ_0 について一次のテイラー展開をすると

$$\delta_p = \lambda_p \delta_0, \quad \lambda_p = \frac{df^p(x)}{dx}\Big|_{x=\bar{x}_j} = \frac{dx_{n+p}}{dx_n}\Big|_{x_n=\bar{x}_j}$$

となる．

$$\begin{aligned} \frac{dx_{n+p}}{dx_n} &= \frac{dx_{n+1}}{dx_n}\frac{dx_{n+2}}{dx_{n+1}}\cdots\frac{dx_{n+p}}{dx_{n+p-1}} \\ &= f'(x_n)f'(x_{n+1})\cdots f'(x_{n+p-1}), \quad (f'(x) \equiv df(x)/dx) \end{aligned}$$

から $\lambda_p = df^p(x)/dx|_{x=\bar{x}_j}$ が周期軌道上の全ての点 $\bar{x}_j$ で同じ値

$$\lambda_p = f'(\bar{x}_0)f'(\bar{x}_1)\cdots f'(\bar{x}_{p-1})$$

をもつことがわかる．どんな $\bar{x}_j = x_n$ に対しても、与えられた周期軌道上の各点を通る $x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+p-1}$ は周期内の各点で上に示した f' の積を導きながら一周する．周期を２周すると $\bar{x}_j + \delta_{2p} = \bar{x}_j + \lambda_p\delta_p = \bar{x}_j + \lambda_p^2\delta_0$ となり、変位 $\delta_{2p} = \lambda_p^2\delta_0$ となる．一般に m 周後の変位は

$$\delta_{mp} = \lambda_p^m\delta_0$$

となる．

このことから周期軌道からの変位は周期を一周するごとに $|\lambda_p|$ 倍になることがわかる．$\lambda_p| > 1$ のとき周期軌道は不安定であるという．周期軌道が安定（$|\lambda_p| < 1$）である場合には周期軌道の近傍を初期値とする軌道はそれに漸近し、その周期軌道はアトラクターとよばれる．λ_p を周期軌道の安定性係数という．

以上から不動点 x での写像の傾きの大きさ $|f'(x)| = |R(1-2x)|$ が $y = x$ の傾き 1 より小さいときに不動点 x は安定であることがわかる．点 x が f の k 周期点であるとき、x は f^k の不動点である．したがって f^k の傾きが 1 より大きいかどうかで k 周期点の安定性を議論することができる．k 周期点 x が安定のとき安定な k 周期点であるという．

$f'(x)$ が R に依存しているため、不動点の安定性はパラメータ R によって変動する．

2.2　分岐とカオス

任意の初期値 x_0 に対し、n の十分大きいところの x_n の挙動は、パラメータ R によって異なる．一般に微分方程式や写像に含まれるパラメータの変化によって安定な解が不安定化し、別の安定解が生じることを分岐という．また、分岐の様子をパラメータと軌道について表したグラフを分岐図という．例えば、2^{n-1} 周期軌道から 2^n 周期軌道への分岐を周期倍分岐 (period doubling bifurcation) と呼ぶ．この分岐は分岐図では熊手の形をしていることから、熊手型分岐（pitchfork bifurcation) とも呼ばれる．また、$y = f(x)$ が $y = x$ と接した後、安定点と不安定点が対になって現れる分岐を接線分岐と呼ぶ．

ロジスティック写像では、パラメータ R に対応する軌道の状態は以下のように分類できる．

$0 < R \leq 1$ のとき：

区間 $[0,1]$ の初期値をもつ点は全て $x = 0$ に漸近する．

$1 < R < 3$ のとき：

不動点は $x_0 = 0$ と $x_1 = 1 - 1/R$ の２つある．x_0 は不安定なので、区間 $[0,1]$ 上の初期値をもつ軌道は x_1 に収束する．

$3 \leq R \leq R_\infty$ のとき：

$2, 2^2, 2^3, \cdots$ 周期点が現れる．任意の初期値を持つ点は R に対応する 2^n 周期解のどれかに収束する．つまり規則的である．

R を増やすと周期倍分岐により、$R = R_n$ で 2^n 周期点が不安定になって残り、新たに安定な 2^{n+1} 周期点が現れる．周期倍分岐での R_n の間隔は n が増大するにつれて等比級数的に小さくなる．この公比の逆数 δ をファイゲンバウム (Feigenbaum) 定数と呼ぶ．

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \frac{R_n - R_{n-1}}{R_{n+1} - R_n} = 4.669201609\cdots$$

R は結局 $R_\infty = 3.5699456\cdots$ という値に収束する．

$R_\infty < R \leq 4$: カオス領域

もし安定な周期点が存在するなら軌道はその周期軌道となるが、存在しない場合にはほとんどの軌道はカオスになり、どこにも落ち着くことがない．$R = 4$ ではあらゆる周期の周期軌道が現れるが、それらはすべて不安定であるのでピュアーカオスとよばれる．カオスの状態では分岐図のある領域に点が密に存在する．一方、カオス的に点が広がらずに白抜きになっている R の領域がある．これを窓 (window) とよぶ．例えば $R \sim 3.83$ では 3 周期軌道をもつ窓が観測される．窓は接線分岐とよばれる分岐により生じる．例えば、3 周期の窓は $y = x$ と $y = f^3(x)$ のグラフが接するときに生じる．

窓の直前には間欠性カオスが存在する．このとき軌道はラミナー（laminar）とよばれる静かな周期的な部分と、バースト（burst）とよばれる爆発的な変化の部分から構成される．

2.3 シャルコフスキーの定理

I から I への写像 f が p 周期解をもつなら必ず q 周期解をもつとき $p \to q$ と書くことにする．シャルコフスキーの定理は

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
3 & \to & 5 & \to & 7 & \to & 9 & \to & \cdots & \to & 2n+1 & \to & \cdots & \to & \\
2\cdot 3 & \to & 2\cdot 5 & \to & 2\cdot 7 & \to & 2\cdot 9 & \to & \cdots & \to & 2(2n+1) & \to & \cdots & \to & \\
2^2\cdot 3 & \to & 2^2\cdot 5 & \to & 2^2\cdot 7 & \to & 2^2\cdot 9 & \to & \cdots & \to & 2^2(2n+1) & \to & \cdots & \to & \\
2^3\cdot 3 & \to & 2^3\cdot 5 & \to & 2^3\cdot 7 & \to & 2^3\cdot 9 & \to & \cdots & \to & 2^3(2n+1) & \to & \cdots & \to & \\
\cdots & \to & 2^k & \to & 2^{k-1} & \to & 16 & \to & 8 & \to & 4 & \to & 2 & \to & 1
\end{array}$$

つまり、3 周期が存在すれば、5 周期、7 周期、....、というように全ての周期が存在することを述べている．ただしこの定理はこれらの周期軌道の安定性については何も述べていない．

リー、ヨークらは「Period three implies chaos」と呼び、カオス発生の基準とした．ロジスティック写像では $R = 3.8284...$ で 3 周期の窓が見られる. ここで全ての周期解が現れ、その他に非周期解が現れる.$R > 3.8284$ でカオスであるが、2^n 周期が全て不安定になることから $R > 3.5700...$ をカオスと呼んでよい．

2.4　リアプノフ指数

軌道の初期値に対する鋭敏な依存性を調べる便利な道具としてリアプノフ指数 (Lyapunov exponent) がある．一次元写像のリアプノフ指数 h は、無限小の大きさで近接する 2 つの初期点から出発したそれぞれの軌道が、時間とともに平均的に指数関数的に離れて行く指標を与える．近接する 2 点から出発する軌道が指数関数的に離れる場合をカオスという．

無限小の距離 dx だけ離れた 2 つの点 $x_0, x_0 + dx_0$ は、大きな n に対して n 時間後には距離 dx_n

$$dx_n \sim e^{nh} dx_0$$

離れる．dx_n は 2 つの点の写像による各反復における距離によって得られる．リアプノフ指数 h を

$$h = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \ln \left| \frac{dx_T}{dx_0} \right|$$

で定義する．

$$\begin{aligned} \frac{dx_T}{dx_0} &= \frac{dx_T}{dx_{T-1}} \cdot \frac{dx_{T-1}}{dx_{T-2}} \cdots \frac{dx_2}{dx_1} \cdot \frac{dx_1}{dx_0} \\ &= f'(x_{T-1}) f'(x_{T-2}) \cdots f'(x_0) \end{aligned}$$

に注意すると、

$$h = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} \ln |f'(x_n)| \tag{1}$$

を得る．ある R で f が安定な周期軌道をもてば、離れた 2 点を初期値とするそれぞれの軌道は結局同じ安定な周期軌道に収束するため、安定点においては $|f'| < 1$ であることからリアプノフ指数は負になることがわかる．$h > 0$、つまり近接した 2 点間の距離が指数関数的に増大していくことを観測されるカオスの生じる基準とする．

2.5　パワースペクトル

時間の関数として得られたデータをフーリエ変換することによって振動数のデータが得られる．これをパワースペクトルと呼び、軌道 $\{x_j; j = 0, 1, \cdots, n-1\}$ から

$$a_k = \sum_{j=0}^{n-1} x_j \exp\left(-i \frac{2\pi jk}{n}\right), \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1)$$

によって得られる．

$|a_k|^2$ を振動数 $f = k/T$（T はサンプリングした時間で $T = n$）に対してプロットすると、軌道が周期軌道であるとき、パワースペクトルには、その周期に対応する振動数のところにだけピークが現れる．ところが運動がカオスであれば、このような孤立した線スペクトルは現れず、あらゆる周波数に対応するピークが現れる．

2.6 微分方程式

次の微分方程式を考える.

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta x^2 \tag{2}$$

この微分方程式は容易に積分でき、初期値を x_0

$$x_\infty = \frac{\alpha}{\beta} \tag{3}$$

とすると解は、

$$x = \frac{x_0 e^{\alpha t}}{1 + \frac{x_0}{x_\infty}(e^{\alpha t} - 1)} \tag{4}$$

となる. わずかに異なる 2 つの初期値から出発した軌道の差はそれほどないことがわかるはずである.

さて、この微分方程式を数値的に解くことを考えよう. $x(t_n)$ を x_n、$x(t_n + \delta t)$ を x_{n+1} と書くと、(2) は差分方程式

$$x_{n+1} - x_n = \alpha\delta t x_n - \beta\delta t x_n^2 \tag{5}$$

に書き換えることができる. ここで

$$\alpha\delta t = R - 1 \tag{6}$$

$$\beta\delta t = R \tag{7}$$

とおくと、この微分方程式の差分版はロジスティック写像と一致する.

微分方程式の解の挙動はどんな条件に対しても何の変哲もないのに、差分化したロジスティック写像には条件によってカオスや周期軌道が現れるため微分方程式の数値計算には注意が必要であることがわかる.

3 2 次元写像：標準写像

位置 q、運動量 p の 2 つの次元をもつ非線形ハミルトン力学系の例として周期的打撃振子 (kicked rotator) がある. これは、平面上に一端を固定した棒に一定方向から一定周期の間隔で打撃を与えて回転させるモデルである. この運動を記述する運動方程式は、時刻 n の棒の回転角度（打撃の方向からの角度)、運動量をそれぞれ q_n, p_n として

$$p_{n+1} = p_n - \frac{A}{2\pi}\sin 2\pi q_n \tag{8}$$

$$q_{n+1} = q_n + p_{n+1} \tag{9}$$

$$= q_n + p_n - \frac{A}{2\pi}\sin 2\pi q_n \tag{10}$$

で与えられる. q_n は 1 で規格化した回転角度であるので、写像の反復ごとに mod 1 の値を取る. この 2 次元写像は標準写像と呼ばれ、現在まで数多くの研究者によって研究されている.

打撃の強さ A を決め、初期値 (q_0, p_0) を与えると、写像を反復することによって軌道が決定論的に決まる. 横軸 q、縦軸 p の平面（相平面）に軌道をプロットすると系の様子がよくわかる.

打撃 0、つまり $A = 0$ の場合

$$p_n = p_0 \tag{11}$$
$$q_n = q_0 + (n-1)p_0 \tag{12}$$

となって、等速度運動である.

$A \neq 0$ では一般に周期運動とカオスが現れる. 丸い軌道の中心は有理数の周期をもつ軌道、例えば原点は常に静止しているので安定な周期 0 の周期点である. また、$(q, p) = (\pm 0.5, 0)$ は打撃と 180 度の位置に棒がある場合で、180 度より大きいか小さいかで打撃による回転方向が変化するため不安定な周期点である. また、実線（点線）でつながったように見える軌道は無理数の周期をもつ軌道である. これらの丸い軌道の集まりを島 (island) と呼ぶ. それ以外の点で塗りつぶされたように見える軌道はカオス軌道である. 例えば不安定周期点 $(q, p) = (\pm 0.5, 0)$ は壊れてカオスになる. 打撃の強さだけでなく初期値によって、棒の回転が周期的になったり不規則（カオス）になることがわかる.

$A \leq 0.97...$ ではカオス軌道は局所的にしか存在しないが A がこれを越えるとカオス軌道は運動量の全域に広がり始める.（大域的カオス）

4 課題

（1）R と初期値 x_n を適当に選び、500 回の反復によって得られた軌道を観察せよ. $y = x, y = f(x)$ のグラフと、横軸 x_n 縦軸 x_{n+1} をプロットしたグラフ（リターン・マップ）つまり、$(x_0, x_1), (x_1, x_2), \cdots, (x_{n-1}, x_n)$ をプロットしたもの、を描くと軌道の特徴がわかる.

（2）周期倍分岐：

ロジスティック写像は $R = 3.0$ で 2 周期軌道をもつ. 2 周期軌道が $y = x$ と $y = f^2(x) = f(f(x))$ のグラフの交点で与えられることを理解して、$R = 3.0$ 前後（$R = 2.8, 3.0, 3.2$）での $y = x$ と $y = f^2(x)$ のグラフ（横軸 x、縦軸 y ）を描き、1 周期軌道から 2 周期軌道が分岐する様子を説明せよ. また、各交点の近傍の初期値から得られた軌道によってリターン・マップを描き、それぞれの点の安定性を調べ、理論的に説明せよ.

（3）接線分岐：

$R = 1 + \sqrt{8}$ で 3 周期軌道が現れる. $R = 1 + \sqrt{8}$ 前後（$R = 1 + \sqrt{8} - \epsilon, 1 + \sqrt{8}, 1 + \sqrt{8} + \epsilon$; ただし ϵ は微小量）の $y = f^3(x) = f(f(f(x)))$ と $y = x$ との関係を図示し、周期倍分岐と異なる点を説明せよ.（2）と同様に、各点の安定性を調べよ.

（4）分岐図：

$0 \le R \le 4$ に対する分岐図を作れ．この図は以下の手順で得られる．(注意) 計算機の負荷のことを考えて、一度に全てを計算して図示するプログラムは避けること．プログラムに間違いがないことを確認してから実行すること．

(a) : $R = 0.0$ に設定する．

(b) : x_0 を適当にとる．

(c) : 写像を 500 回反復する．

(d) : 写像をさらに 500 回反復し、その 500 個のデータをとる．

(e) : R を増やす．すなわち $R \to R + 0.01$ とする．

(f) : (b) に戻って同じ手順を繰り返す.

横軸を R、縦軸を $x_{501}, x_{502}, \cdots, x_{1000}$ の値としてグラフを描け.(最初の 500 回の反復による軌道をデータとしてとらない理由：安定な周期軌道が存在するときには、周期軌道上にない初期値から出発した軌道がその周期軌道に引き込まれるまでに過渡的な状態をもつと考え、そのような状態を除外するためである.)

$R \ge 3$ について拡大した分岐図を描け. 特に 3 周期が現れる R の付近を調べよ.

(5) ファイゲンバウム数：

$2.9 \le R \le R_\infty$ で、周期倍分岐が起こるパラメータ R の間隔は等比級数的に短くなることを、横軸を R ではなく $-\log(R_\infty - R)$ に変えてプロットした分岐図から理解せよ. また、数値計算のデータから R_n の値をとって公比の逆数を 2 、3 個求め、ファイゲンバウム数と近い値になることを確認せよ.

(6) リアプノフ指数：

$0 \le R \le 4$ でのリアプノフ指数 h を式 (1) によって求めよ．ただし $T = 1000$ とし、横軸を R、縦軸を h に取って図示せよ．この図と (4) で求めた分岐図とを見比べ、両者の関連性を説明せよ.

(7) 間欠性カオス：

3 周期の窓の直前で存在する間欠性カオスを調べよ．$R = 1 + \sqrt{8} - 0.0001$ として初期値を適当に取って、横軸を反復回数 n、縦軸を x_n としてグラフを描け.

(8) パワースペクトル：

パワースペクトルを、規則運動（周期運動）を示すいくつかの R の場合と、カオスを示す $R = 4$ の場合についてそれぞれ求めよ．ただし、周期アトラクタに引き込まれるまでの過渡的な状態を除くため、十分時間が経過したデータをとること.

周期軌道の場合は、その周期に対応する周波数のところだけにピークが現れることを確認せよ. カオスの場合はどのようなことが言えるか．なぜそうなるか述べよ.

フーリエ変換を数値計算で行なう場合には FFT（高速フーリエ変換）を用いると便利である．ただし FFT を使う時にはデータ数は 2 のべき乗でなければならない．

FFT が使えない場合は式をそのままプログラムにすれば良い．

（9）微分方程式 (2) の解 (4) をプロットし、ロジスティック写像の場合と比較せよ．ロジスティック写像が周期解をもつときの R、カオスとなる R のそれぞれについて、近接する 2 つの初期値から得られる微分方程式と写像の解を描きその違いを調べよ．この結果から微分方程式を数値的に解くことの意味を論じよ．

(10) 標準写像：局所的カオス

$A = 0.8$ の相平面の特徴を調べよ．（周期軌道、カオス軌道）

ただし q, p は $[-0.5, 0.5]$ の範囲で描くこと．写像 1 回の反復ごとに q は $-0.5 \leq q \leq 0.5$ の範囲で mod 1 を取らなければならない．$p_0 = 0$ とし、q_0 は $[-0.5, 0.5]$ を 50 等分した 50 個の初期値についてそれぞれ時間 $n = 1000$ までの軌道を描け．

mod 1 のための FORTRAN 関数文 q_ new の例．

```
function q_new(x)
implicit real*8(a-h, o-z)
y=dmod(x, 1.d0)
q_new=y
if(y.le.-0.5d0) then
  q_new=y+1.d0
elseif(y.gt.0.5d0) then
  q_new=y-1.d0
endif
return
end
```

(11) 標準写像：大域的カオス

$A = 1.5$ の相平面を描け．描き方は (10) と同様である．大域的カオスを確認せよ．周期軌道は存在するか．

(12) 実験に関する感想、意見などを述べよ．少なくとも A4 半ページは書くこと．時間に余裕のある人は情報の分野とカオスとの関連について調べよ．

参考文献

[1] 合原一幸: カオス（サイエンス社, 1990）．

[2] 齊藤信彦: 物理学最前線 30 「カオスの物理」（共立出版）.

[3] 戸田盛和: カオス （岩波書店）.

[4] 長島弘幸、馬場良和: カオス入門（培風館）.

[5] 早間慧: カオス力学の基礎（現代数学社）.

[6] Edward Ott: Chaos in Dynamical Systems (Cambridge).

[7] E. A. Jackson: 非線形力学の展望 I, II （裳華房）.